Лекция 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Сумма и произведение события

Суммой или объединением, нескольких событий называется событие, состоящее в появлении наступления хотя бы одного из этих событий.

Сумма S событий $A,B,C,...,N$ обозначается так:

$$S=A+B+C+...+N$$

Например, если событие A есть попадание в цель при первом выстреле, событие B - попадание в цель при втором выстреле, то событие

$$C=A+B$$

есть попадание в цель вообще, безразлично, при каком выстреле - при первом, при втором или при обоих вместе.

Произведением, или совмещением, нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. -

Произведение $П$ событий $A,B,C,...,N$ обозначается

$$П=ABCD...N$$

Например, если событие A есть попадание в цель при первом выстреле, событие B - попадание в цель при втором выстреле, то событие

$$C=AB$$

состоят в том, что в цель попали при обоих выстрелах.

При решении различных задач, связанных с событиями, очень часто приходится представить сложные события в виде комбинации более простых событий, применяя операцию сложения и операцию умножения события.

Например, пусть по мишени производятся три выстрела и рассматриваются следующие простейшие события :

A_1 - попадание при первом выстреле;

$\overline{A_1}$ - промах при первом выстреле;

A_2 - попадание при втором выстреле;

$\overline{A_2}$ - промах при втором выстреле;

A_3 - попадание при третьем выстреле;

$\overline{A_3}$ - промах при третьем выстреле.

1. Рассмотрим сложное событие *B*, состоящее в том, что в результате трех выстрелов будет равно одно попадание в мишень. Событие *B* можно представить в виде следующей комбинации простейших событий :

$$B = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$$

2. Событие *C.*, состоящее в том, что в мишень будет не менее двух попаданий, может быть представлено в виде

$$C = A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1A_2A_3$$

Непосредственно из определения суммы и произведения событий следует, что

$$A+A=A,$$

$$A \cdot A = A$$

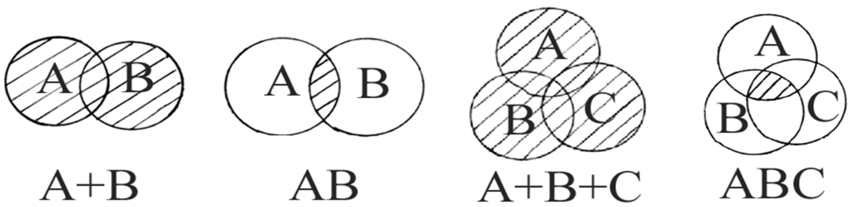
Если появление одного события *B* влечет за собой появление другого события *A*, то говорят что событие *B* содержится в событии *A* и обозначают символом

$B \subset A$ (*B* содержится в *A*)

При этом A+B=A

AB=B

Понятия суммы и произведения событий имеют наглядную геометрическую интерпретацию.



A - попадание точки в область *A*,

B - попадание точки в область *B*,

C - попадание точки в область С.

Пример. В урне содержится *30* шаров: 10 красных, 5 синих, 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара (либо красного, либо синего).

A - появление красного шара, $P(A) = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

B - появление синего шара, $P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

События A и B несовместны, поэтому теорема сложения применима

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

Теорема сложения вероятностей

Теорема. Вероятность наступления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Доказательство. Введем обозначения:

n - общее число возможных случаев ,

m_1 — число случаев благоприятствующих событию A,

m_2 - число случаев благоприятствующих событию B.

Так как события A и B несовместны, то нет таких случаев, которые благоприятны и A и B вместе. Следовательно, событию $A+B$ благоприятны m_1+m_2 случаев и

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B) \qquad (1.2)$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

(доказывается методом математической индукции.)

Полная группа несовместных событий

Противоположные события

Теорема. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1$$

Доказательство. Так как события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, то появление хотя бы одного из них - достоверное событие:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1$$

Так как $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - несовместные события, то к ним применима теорема сложения вероятностей

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Противоположными событиями называются два несовместных события, образующих полную группу. Событие, противоположное событию A, обозначается $\overline{A}$.

Примеры, если:

A - попадание при выстреле, то

$\overline{A}$ - промах при выстреле.

B - выпадение герба при бросании монеты,

$\overline{B}$ - выпадение цифры при бросании монеты.

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице (частный случай предыдущей теоремы).

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad (1.3)$$

Замечание. Если вероятность одного из противоположных событий обозначена через *p* , то вероятность другого события принято обозначать через q. В силу предыдущей теоремы

$$p+q=1.$$

Теорема умножения вероятностей

Два события называют независимыми, если вероятность одного из них не зависит от появления или не появления другого.

Пример. Монета брошена 2 раза. Вероятность появления герба в первом испытании не зависит от появления или не появления герба во втором испытании.

Несколько событий называют попарно независимыми, если каждые два из них независимы.

Два события называют зависимыми, если вероятность появления одного из них зависит от наступления или не наступления другого события.

Пример. В урне два белых шара и один черный; два лица вынимают из урны по одному шару; рассматриваются события:

A - появление белого шара у 1-го лица,

B - появление белого шара у 2-го лица.

Вероятность события A до того, как известно что-либо о событии B , равна $2/3$.

Если стало известно, что B произошло, то вероятность события A становится равной $1/2$;

Определение. Вероятность события A, вычисленная при условии B, что имело место другое событие называется условной вероятностью события A и обозначается $P_B(A)$

Для условия последнего примера

$$P(A)=\frac{2}{3};\ P_B(A)=\frac{1}{2}$$

Условие независимости события A от события B можно записать

$$P_B(A)=P(A)$$

а условие зависимости - в виде

$$P_B(A)\neq P(A)$$

Теорема. Вероятность совместного появления (произведения) двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A)\ (*)$$

Доказательство. Пусть число возможных случаев n . Изобразим их для наглядности в виде n точек. Предположим, что событию A благоприятны m случаев, а событию B благоприятны $к$ случаев. Так как мы предполагали события A и B несовместными, то вообще существуют случаи, благоприятные и событию A , и событию B одновременно. Пусть число таких случаев l . Тогда

$$P(AB)=\frac{l}{n};\ P(A)=\frac{m}{n}$$

Если известно, что событие A произошло, то из ранее возможных n случаев остается возможными только те m , которые благоприятствовали событию A. Из них l случаев благоприятны событию B .

Следовательно $P_A(B)=\dfrac{l}{m}$

Подставляя выражения $P(AB)$, $P(A)$, $P(B)$ в формулу (*) получим тождество.

Пример. В урне 2 белых и 3 чертах шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Обозначим. A_1 - появление белого шара при первом вынимании.

A_2 - появление белого шара при втором вынимании.

Тогда A_1A_2 - появление двух белых шаров

$$P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$